



TITLE:

菊池の関数 $x^\alpha \omega^{-\beta}(1-\omega)=N(0<\omega<1)$ について  
(II) (解析的微分方程式の大域的研究)

AUTHOR(S):

林, 喜代司

---

CITATION:

林, 喜代司. 菊池の関数 $x^\alpha \omega^{-\beta}(1-\omega)=N(0<\omega<1)$ について  
(II) (解析的微分方程式の大域的研究). 数理解析研究所講究録 1976, 267: 55-78

ISSUE DATE:

1976-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105877>

RIGHT:

菊池の関数  $x^\alpha \omega^{-\beta} (1-\omega) = N$

( $0 < \omega < 1$ ) について, II

神戸大 理 林 喜代司

$$(1) \begin{cases} \ddot{y} = -y^{-\frac{1}{2}} \{ 2x \dot{y} + 4\lambda(1-y) \} \equiv f(x, y, \dot{y}) \\ y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1; \quad 0 < y(x) < 1 \text{ for } 0 < x < \infty \end{cases}$$

(1) の解を得るには、次の条件を満たす関数  $y = \omega(x)$

( $0 < x < \infty$ ),  $\bar{\omega}(x, y)$  ( $0 < x < \infty, \omega(x) \leq y \leq 1$ ) が  
みつければよい。

$$(2) \quad \bar{\omega}_x(x, y) + \bar{\omega}_y(x, y) \bar{\omega}(x, y) > f(x, y, \bar{\omega}(x, y))$$

$$(3) \quad \underline{\omega}_x(x, y) + \underline{\omega}_y(x, y) \underline{\omega}(x, y) > f(x, y, \underline{\omega}(x, y))$$

( $0 < x < \infty, \omega(x) \leq y < 1$ )

$$(4) \quad \underline{\omega}(x, \omega(x)) \geq \omega'(x)$$

このうち、(2) は

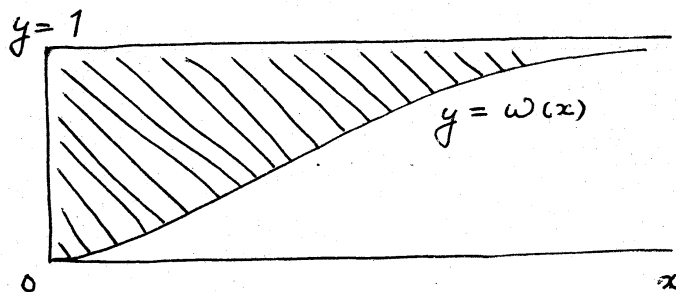
$$\bar{\omega} = L y/x \quad ; \quad L \text{ は正定数}$$

の形で容易に満たされるから、本質的なのは、(3), (4) を同時に満たす  $\underline{\omega}$  (以下  $\omega$  と書く) と  $\omega(x)$  の発見である。

(3)  $k \equiv \mathcal{N}_x + \mathcal{N}_y \mathcal{N} - f > 0$  は  $\omega(x) \leq y < 1$  の範囲で満たされればよい。

たとえば

$$\mathcal{N} = 2x y^{-\frac{1}{2}} (1-y) \quad (0 < y < 1)$$



とおけば

$$k = 2y^{-\frac{1}{2}}(1-y) \left\{ 1+2\lambda - x^2 y^{-\frac{3}{2}}(1-y) \right\}$$

となるから

$$x^2 < \frac{(1+2\lambda) y^{\frac{3}{2}}}{1-y}$$

のところで  $k > 0$  となる。そこで、この式の成り立つギリギリのところを  $x$  の関数  $y = \omega(x)$  で解けば、

$\omega(x) \leq y < 1$  で  $k \geq 0$  が成り立つことになる。

$$y = \omega(x) \iff x^2 = \frac{(1+2\lambda) y^{\frac{3}{2}}}{1-y}$$

これが標記の 菊池の関数  $x^\alpha y^\beta (1-y) = N$  の元来の形である。両辺  $y$  で微分して

$$(5) \quad 2x \frac{dx}{dy} = \frac{1+2\lambda}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}}(3-y)}{(1-y)^2} > 0$$

しかも

$$y \rightarrow 1 \text{ のとき } x \rightarrow \infty$$

であるから  $y = \omega(x)$  は  $0 < x < \infty$  で定義される関数である。

条件 (3) は  $k > 0$  ではないといけなが、それは次のように解釈する。

いま 1 つの  $\lambda_0$  で  $y = \omega_0(x)$  をつくれば、

$$\omega_0(x) \leq y \leq 1 \text{ で } k_0 = \dots \{ 1 + 2\lambda_0 - \dots \} \geq 0$$

そのとき  $\lambda > \lambda_0$  なる  $\lambda$  に対し  $\mathcal{N}$  (これは  $\lambda$  に無関係) と  $y = \omega_0(x)$  を使えば

$$k = \dots \{ 1 + 2\lambda - \dots \} > k_0 \geq 0$$

つまり、1 つの  $\lambda_0$  で壁  $\mathcal{N}$ ,  $\omega_0$  をつくれば、その  $\lambda_0$  に対しては (3) は成り立たないが、同じ壁  $\mathcal{N}$ ,  $\omega_0$  で、 $\lambda > \lambda_0$  なる  $\lambda$  に対しては、(3) が成り立つ。

あと (4)  $\mathcal{N} = 2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y) \geq \frac{dy}{dx}$  ( $y = \omega(x)$ ) を満たすために、

$$2x \frac{dx}{dy} \geq \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1-y} \quad \left( \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} > 0 \right)$$

がいえればよい。

これは (5) から

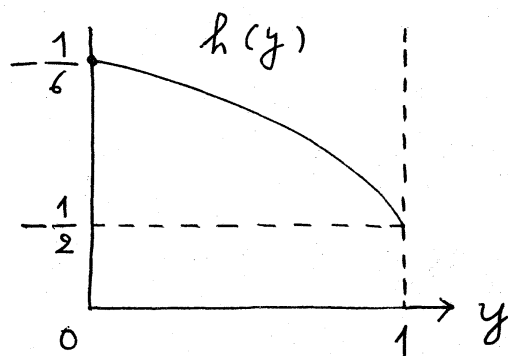
$$\lambda \geq -\frac{1}{2} + \frac{1-y}{3-y} \equiv h(y)$$

と同値であり

$$\sup_{0 < y < 1} h(y) = -\frac{1}{6}$$

であるから、先の議論から

$$\lambda > -\frac{1}{6}$$



に対し (1) の解が得られる。

$y = \omega(x)$  に対し  $1-y = (1+2\lambda)y^{\frac{3}{2}}x^{-2}$   
 であるから  $x \rightarrow \infty$  のとき

$$1-y \sim C_0 x^{-2}$$

一方、(1) の algebraic type の解の order は

$$1-y \sim C_0 x^{2\lambda}$$

であることがわかっているから、 $2\lambda > -1$  である限り  
 (実際 それは十分満たされる) いまの方法では、この  
 algebraic type の解はつかまっていない。

このように、一たん  $\int$  の形を  $2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y)$  と  
きめれば、必然的に  $\lambda > -\frac{1}{6}$  まで到達する。

そこで

$$(6) \quad \int = 2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y)u(y)$$

という形から出発すれば、 $\lambda$  に関して いくつもの評価を得る  
かを しらべ、どういう方針で  $u(y)$  を構成すべきかを  
みることにする。

$u \equiv 1$  の場合は、 $\lambda > -\frac{1}{6}$  のときになる。

このとき  $k$  は

$$(7) \quad k = 2y^{-\frac{1}{2}}(1-y)u \left\{ 1 + \frac{2\lambda}{u} - x^2 y^{-\frac{3}{2}}(1-y)v \right\}$$

$$\text{ここに } v(y) = 1 + \frac{1+y}{1-y}(u-1) - 2yu'$$

$$u \equiv 1 \quad \text{のとき} \quad v \equiv 1$$

いま  $u$  に 条件

$$(8) \quad u \geq 1, \quad u' \leq 0$$

を課すと

$$(9) \quad v \geq 1$$

この条件は、必ずしも必要ないが、あると便利だし、いま  
までつづいた  $u(y)$  はすべてこの条件を満たしているのぞ  
以下、仮定する。

さて、 $h = 0$  の陰関数は

$$(10) \quad y = \omega(x) \iff x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{2\lambda}{u}\right)}{(1-y)v}$$

で決められる。

両辺を  $y$  で微分して

$$2x \frac{dx}{dy} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-y)u} \left\{ \frac{g(y)}{v} (\lambda - h(y)) + 1 \right\}$$

==>

$$g(y) = \frac{3-y}{1-y} - 2y \left( \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \right)$$

$$h(y) = \frac{1}{g(y)} \left\{ v + u \left( y \frac{v'}{v} - \frac{3-y}{2(1-y)} \right) \right\}$$

これより (3)

$$\lambda = 2x y^{-\frac{1}{2}} (1-y) u \geq \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\iff 2x \frac{dx}{dy} \geq \frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-y)u}$$

を満たすには  $g(y) > 0$  とともに

$$\lambda \geq h(y) \quad 0 < y < 1$$

を満足すればよい。

つまり、 $\lambda > \sup_{0 < y < 1} h(y)$  を得る。

$\mathcal{V}$ には  $u'$  が含まれているので、 $h$  は  $u''$  まで関係する

$$h(y) = h(y; u, u', u'')$$

そこで  $u''$ 、 $u(y)$  を構成する方針は

$$\sup_{0 < y < 1} h(y) = \sup_{0 < y < 1} h(y; u, u', u'')$$

をできるだけ小さくするようにということになる。

$g(y) > 0$  は容易に満たされる。

$u$  のだいたいの形は、次のようにして決められる。

$u$  は元来  $u \equiv 1$  の場合の拡張だから、1に近いと考える。

$y = 0$  の近くでは、 $y u'$  のような量は 0 に近いと考えると

$$h(0) = -\frac{u(0)}{6}$$

となる。

そこで、 $u(0)$  をできるだけ大きくするというのが、当面の目標となる。 $\lambda > -0.1988$  を得るには、

$u(0) \geq 1.1928$  が必要ならぬ。



$y = 1$  の近くでは、やはり  $(1-y)u'$  は小さいと考え、 $y = \omega(x)$  を決める

$$x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{u} \right)}{(1-y) + (1+y)(u-1) - 2y(1-y)u'}$$

において、 $u$  は 1 に近く、 $\lambda$  はせいぜい  $-0.3$  くらいだとみると、分子は 0 に近い有限の量であるので、 $y = \omega(x)$  が  $0 < x < \infty$  で定義できるためには分母  $\rightarrow 0$  as  $y \rightarrow 1$  でなければならぬので、 $u(1) = 1$  が要求される。

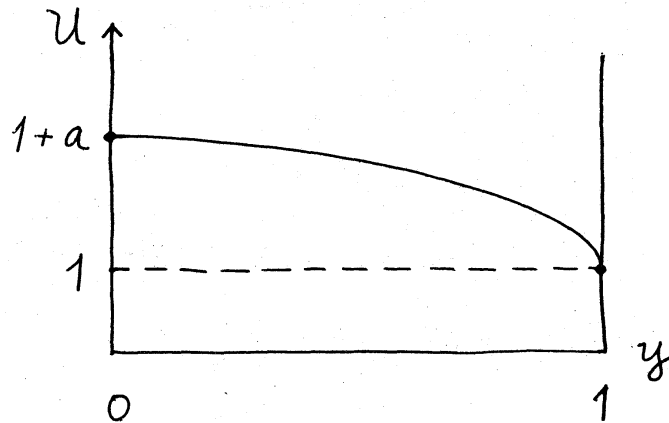
$u$  が 1 に近いという制限をとれば、分子に  $2\lambda/u$  の項があるので、 $y \rightarrow 1$  のとき、 $u \rightarrow 0$  でもよいことになる。実際 その可能性のあることを、あとで述べる。

ただし、この場合は、( ) の右辺の { }

$$1 + \frac{2\lambda}{u} - x^2 y^{-\frac{3}{2}} (1-y)u'$$

において、 $u$  が 0 に十分近い正数値をとる  $y$  のところでは  $1 + 2\lambda/u < 0$  となるので、 $k = 0$  を満たすところでは  $x^2$  の係数は正。従って  $\omega(x) \leq y < 1$  で  $k \leq 0$  となるので、条件 (3) を満たさず、壁として不適当である。

あと、 $u \geq 1$ ,  $u' \leq 0$   
を考慮して、実際に  
少し計算してみれば、  
 $y$ が大きくなるに従って  
 $u$ の絶対値は大きい  
感じなので、 $u(y)$ は



図のようなものをとればよさそうである。

そこで、まず

$$u(y) = 1 + a(1-y)^b \quad 0 < b < 1$$

の形で

$$u = 1 + 0.18(1-y)^{\frac{1}{3}}$$

とすれば

$$\lambda > -0.1962$$

を得る。

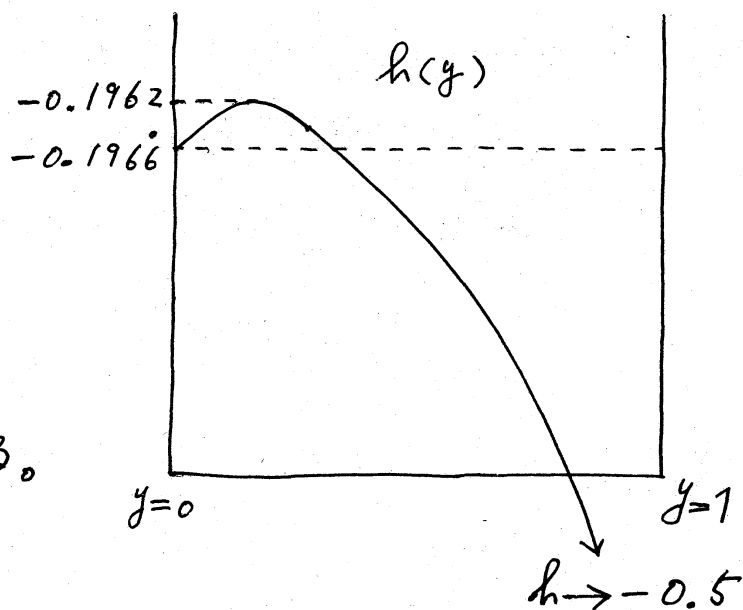
$y=0$  では

$$h = -1.18/6$$

$$= -0.196\bar{6}$$

$y=1$  では

$$h = -0.5 \text{ である。}$$



さらにより評価を得るために

$$u = 1 + a(1 - y^b)^{c+dy}$$

とおいて、 $a, b, c, d$  を動かして、比較的よい値

$$a = 0.192$$

$$b = 1.087$$

$$c = 0.2535$$

$$d = -0.008$$

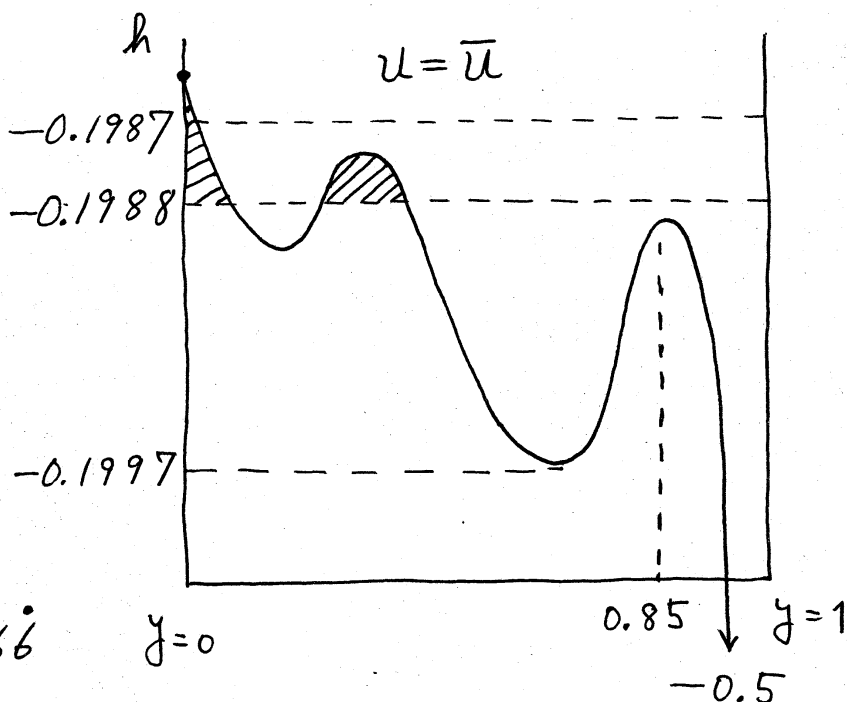
を得る。

この関数を

$\bar{u}$  と書く。

このとき

$$\lambda > -0.19866$$



$h$  のグラフには、だいたい  $u$  の parameter の数  
 ぐらいの“山”があらわれるようである。parameter  
 の数を多くするには、指数のところを  $y$  の 2 次式にしたり、  
 こういった形のを 2 つ加えたり、多項式だけでなく、  
 $\sin$ ,  $\cos$  を使ったり、いろいろ方法があるだろうし、  
 事実、それでいくらかの成果を上げることができるとも知  
 れないが、ここでそういった方向はやめて、もと  $h$  の

値を control しやすい方法を 採用することにする。

それは、いま得た関数

$$\bar{u} = 1 + 0.192(1 - y^{0.2535 - 0.008y})^{1.087}$$

を base にして、それに 微小関数  $\Delta u$  をかぶせて、

$$u = \bar{u} + \Delta u$$

をつくり、 $h(y; \bar{u}, \bar{u}', \bar{u}'')$  の値を修正してこのようにするものである。

$y=1$  の近くは、 $x \rightarrow \infty$  をここに押し込んでいるのだから、かなり微妙であって、人工的な関数ではなかなかうまくいかない。

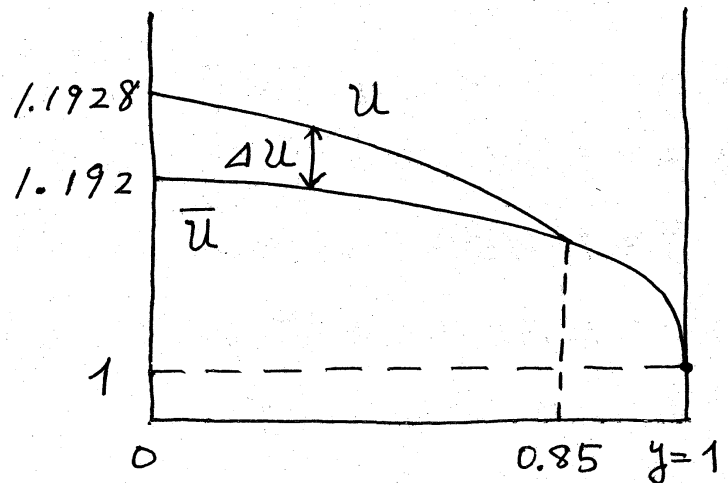
たとえば  $u = (1-y)^\alpha$   $0 < \alpha < 1$  の order だけは、どうしても  $h \rightarrow -0.5$  となってしまう。

これは 無駄であるので ( $h$  は  $\equiv -0.1988$  に近いほど、効率がよいと思われる。完全に  $\equiv -0.1988$  にしようと思えば、 $u$  に関する 2 階の常微分方程式を解くことになる。)  $y=1$  の近くでも  $\sim -0.1988$  にしようと思うのだが、うまくいかない。しかし 証明は  $h$  を上からおさえればいいのだから  $\rightarrow -0.5$  となってもさしつかえない。

しかも、 $\bar{u}$  に対応する  $h$  のグラフを見ると、 $-0.85 \leq y \leq 1$  では  $h < -0.1988$  であるから、この部分では  $\bar{u}$  をそのまま採用し、 $0 \leq y \leq 0.85$  で  $-0.1988$  より上に出ている部分をなくそうとする。ちょうどその右に、大きくへこんだ部分があるので、そこに埋めるような感じである。

$y = 0.85$  から  
左へ  $\Delta u$  をつくっ  
て かぶせるので  
あるが、おおよその  
方針は次の通り。  
 $y = 0$  で

$$h(0) = -\frac{u(0)}{6}$$



であるから、 $\bar{u}$  では  $-0.1986\bar{6}$  の評価しか得られなかったのであり、 $-0.1988$  を得ようとするには、

$$u(0) = 1.1928 \quad \text{でなければならぬ。}$$

そこで  $\Delta u$  は、できるだけ大きくなるようにする。

$h$  の値に余裕があるところで、できるだけ  $\Delta u$  を大きくしておき、 $h$  が  $-0.1988$  を越えているところでは、やむを得ず  $h$  を下がる。

こうして、 $y = 0.85$  から出発して 左へのはしていき、

$y=0$  に到達できればよいのであるが、必ず到達できるかどうかはわからない。

$h \equiv \lambda_0 (= -0.1988 \text{ for example})$  は  $u$  に関する非線型のス階常微分方程式であるから、 $y=0.85$  で  $\bar{u}$  に等しい初期値を与え（それで  $C'$  で接続できる  $\bar{u}(0.85) = \lambda_0$  なら  $C^2$ 。証明には  $C'$  までのしか要請されない）左に解いていけば、 $0$  に達する前に発散するかもわからない。

実際に  $\lambda > -0.1988$  を得たのは、 $y=0$  から左発しあらたに  $u(y)$  をつくって、 $\bar{u}$  に十分近づいたところで  $C'$  で接続する方法である。

$u$  を微分方程式

$h \equiv \lambda$  を解いて求

めたとする。  $y u'$ ,

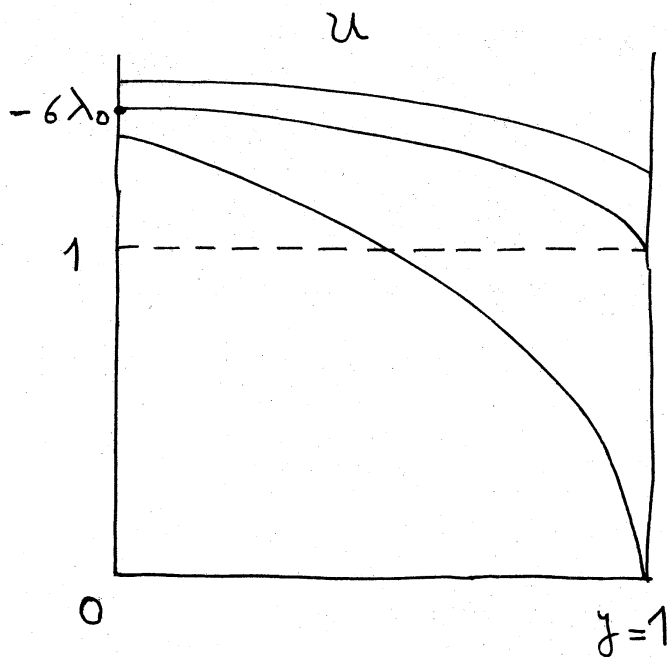
$y^2 u''$  が  $y \rightarrow 0$  の

とき  $\rightarrow 0$  とすると

$$u(0) = -6\lambda$$

である。

後述するが、 $y=0$  から右へのばせば、発散することなく  $y=1$



まで達する。(  $u', u''$  は  $y \rightarrow 1$  のとき発散するかも知れない。)

(1) が解を持つギリギリの  $\lambda$  (存在することはわかっている) を  $\lambda_0$  とすれば

$$\begin{array}{ll} \lambda > \lambda_0 \text{ のとき} & u \rightarrow 0 \\ \lambda = \lambda_0 \text{ のとき} & u \rightarrow 1 \\ \lambda < \lambda_0 \text{ のとき} & u \rightarrow 1 + \beta_\lambda \quad (\beta_\lambda > 0) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda > \lambda_0 \\ \lambda = \lambda_0 \\ \lambda < \lambda_0 \end{array}} \right\} \text{as } y \rightarrow 1$$

このことは、

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

なる初期値をもつ

(1) の解が

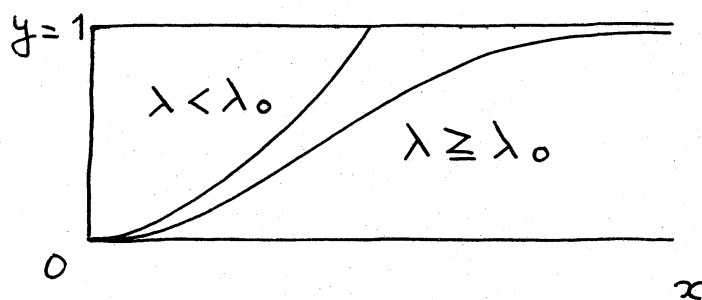
$$\lambda > \lambda_0 \text{ のとき} \quad x \rightarrow \infty \text{ で } 1-y \downarrow 0 \quad (\text{algebraic type})$$

$$\lambda = \lambda_0 \text{ のとき} \quad \text{"} \quad (\text{exponential type})$$

$$\lambda < \lambda_0 \text{ のとき} \quad x: \text{有限で } y=1 \text{ に達する}$$

であることにそれぞれ対応している。

$x \rightarrow \infty$  のときの  $1-y$  の order の違いが、 $u(y)$  の  $y \rightarrow 1$  のときの挙動に微妙な影響をおよぼす。



これらのことは 次のようにして わかる。

$h = h(y; u, u', u'') \equiv \lambda$  という  $u$  に関する 2 階常微分方程式の解  $u(y)$  が与えられたとする。

この  $u(y)$  を  $\lambda \equiv ()$ ,  $y = \omega(x)$  を  $()$  で定義すれば

$y = \omega(x)$  は  $k = \lambda_x + \lambda_y \lambda - f = 0$  の陰関数であり、 $h \equiv \lambda$  は その定義から  $\lambda = dy/dx$ 。

すなわち 次の 2 式が 成り立つ

$$(11) \quad \lambda_x(x, \omega(x)) + \lambda_y(x, \omega(x)) \lambda(x, \omega(x)) \\ = f(x, \omega(x), \lambda(x, \omega(x)))$$

$$(12) \quad \lambda(x, \omega(x)) = \omega'(x)$$

(12) の両辺を  $x$  で微分して

$$\begin{aligned} \omega''(x) &= \lambda_x(x, \omega(x)) + \lambda_y(x, \omega(x)) \omega'(x) \\ &= \lambda_x(x, \omega(x)) + \lambda_y(x, \omega(x)) \lambda(x, \omega(x)) \\ &= f(x, \omega(x), \lambda(x, \omega(x))) \\ &= f(x, \omega(x), \omega'(x)) \end{aligned}$$

これは  $y = \omega(x)$  が もとの方程式の解である ことを示している。



また逆に (1) の解  $y = f(x)$  が与えられたとき  $x$  と  $y$  に 1-1 の対応がついていれば (12) で  $u(y)$  を定義することもできる。(6) の形は 変えない)

その意味で 方程式  $h \equiv \lambda$  は 本質的に もとの方程式 (1) と 同値である。

(1) の解の  $y \rightarrow 1$  のときの挙動が ある程度わかっているから  $u \rightarrow 0$  or  $1$  というようなことが 出てくる。

実際 もとの 3 階の方程式

$$x''' + 2xx'' + 2\lambda(1-x'^2) = 0$$

の解  $x(t)$  の  $t \rightarrow \infty$  のときの挙動は

exponential type

$$\begin{cases} 1-x' & \sim C_0 t^{-1-2\lambda} \exp(-t^2 - c_1 t) \\ x'' & \sim 2t(1-x') \end{cases}$$

algebraic type

$$\begin{cases} 1-x' & \sim C_0 t^{2\lambda} \\ x'' & \sim -2\lambda C_0 t^{-1+2\lambda} \end{cases}$$

であり  $y = y(x) = x'^2$  であり、たから  $\frac{dy}{dx} = 2x''$

$x'(t) \rightarrow 1$  as  $t \rightarrow \infty$  から  $x \sim t$

$$1-y = 1-x'^2 = (1+x')(1-x') \sim 2(1-x')$$

また

$$u(y) = \frac{y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}}{2x(1-y)} \sim \frac{2x''}{4x(1-x')}$$

そこで

$$\text{exp.} \quad u \sim \frac{4t(1-x')}{4x(1-x')} \rightarrow 1$$

$$\text{alg.} \quad u \sim \frac{2(-2\lambda)C_0 t^{-1+2\lambda}}{4x C_0 t^{2\lambda}} \sim \frac{-\lambda}{x^2} \rightarrow 0$$

となる。

整理すれば、 $u(0) = -6\lambda$  から始めて 微分方程式  $h = \lambda$  を解いていけば、(1) の解があるギリギリの  $\lambda$  を  $\lambda_0$  とするとき

$$\lambda = \lambda_0 \text{ ならば } u \rightarrow 1 \quad \text{as } y \rightarrow 1$$

$$\lambda > \lambda_0 \text{ ならば } u \rightarrow 0 \quad //$$

となる。

それは、 $u$  に対応する解  $y = y(x)$  は このとき $y'(0) = 0$  であるからである。そのような解が

exponential type になるのは  $\lambda = \lambda_0$  のときに限られる。

$\lambda > \lambda_0$  のときは algebraic type.  $\lambda < \lambda_0$  のときは 有限の  $x$  で  $y = 1$  にぶつかる

この  $u(y)$  に対し、解  $y = y(x)$  は

$$x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{u} \right)}{(1-y) + (1+y)(u-1) - 2y(1-y)u'}$$

が implicit に与えられる。

このように  $h = \lambda$  を解いていくことは、もとの方程式を解くのことと同じことなのであるが、実際には  $h = \lambda$  を等号で解いていくのは不可能である。理論的には常微分方程式の基本定理からもちろん可能であるが、実際に式について見せるわけにいかない。

ところが、いま  $u(y)$  を式でつくって  $h$  を  $\lambda$  から、あまりはずれないようにできたとき（はずれていてもかまわないのだが、それでは効率が悪い）解は得られたことにならないが、 $h$  の上限を  $\lambda_0$  とするとき  $\lambda > \lambda_0$ 。

なる  $\lambda$  に対して、(1) の解の存在を言うことができる。

ここにこの方法の意味がある。

そこで  $h = -0.1988$  を近似的に解いていく。

$u(0) = -6\lambda = 1.1928$  であればよいが、誤差を考えて

$$u(0) = 1.192803 \quad \text{とす。}$$

$u(y)$  は、最初 2 次式 とし

$$u_1(y) = 1.192803 + ay + by^2$$

とす。このとき 係数  $a, b$  は

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) = 0$$

として 決められる。

$u_1$  に対応する

$h_1$  は、実際 計算  
してみれば、右図の  
ようになっている。

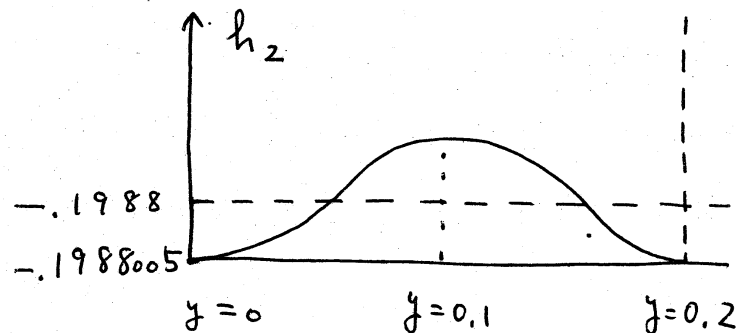
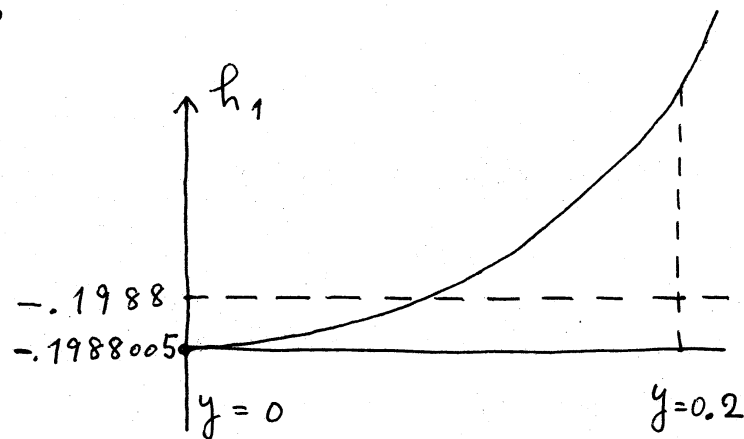
そこで、3次式

$$\Delta u = \alpha y^3$$

をかぶせて、 $y=0.2$   
において、 $h$  の値  
を修正する。

係数  $\alpha$  は、次の

ように決められる。



$$u_2 = u_1 + \Delta u \quad \text{とおくと}$$

$$h_2 = h(y; u_2, u_2', u_2'')$$

$$= h(y; u_1 + \Delta u, u_1' + \Delta u', u_1'' + \Delta u'')$$

$$\begin{aligned}
 &\doteq h(y; u, u', u'') \\
 &\quad + \partial h / \partial u \Delta u + \partial h / \partial u' \Delta u' + \partial h / \partial u'' \Delta u'' \\
 &= h_1 + h_u \Delta u + h_{u'} \Delta u' + h_{u''} \Delta u''
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 &\alpha \times (h_u \times 0.2^3 + 3h_{u'} \cdot 0.2^2 + 6h_{u''} \cdot 0.2) \\
 &= y=0.2 \text{ における } h_1 \text{ と理想値の差}
 \end{aligned}$$

によつて  $\alpha$  が決められる。

このやり方では、 $y=0.2$  のところではよくなるが、  
 そのかわり  $y=0.1$  あたりではまたはずれてくる。  
 しかし、全体としてのはずれは、やはり小さくなつて  
 いる。

これを修正するには、上と同じ方法で  $y=0.1$  のと  
 こだけではやろうとすると、また  $y=0.2$  あたりでは  
 はずれてくる可能性があるので、 $y=0.1$  と  $y=0.2$   
 同時に修正する。

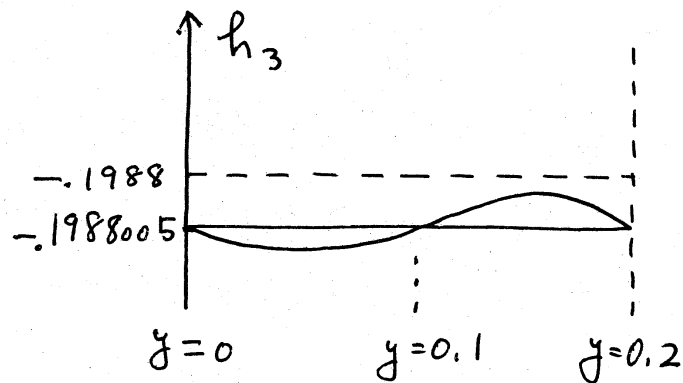
$$\text{それには} \quad \delta u = \beta y^3 + \gamma y^4$$

と parameter を 2 つにする。

$$u_3 = u_2 + \delta u = u_1 + \Delta u + \delta u$$

$\beta$  と  $\gamma$  は、上と  
ほとんど同じ方法で  
連立1次方程式を解  
いて得られる。

$u_3$  に対応する  
 $h_3$  は図のよう  
になり、ようやく



$h \leq -0.19880$  のレベルに おさえられる。

$y=0.2$  から右は、いまの  $u_3$  から始めて、やはり

$$\Delta u = \alpha (y - 0.2)^3 \text{ で 1 度修正し、}$$

$$\delta u = \beta (y - 0.2)^3 + \gamma (y - 0.2)^4$$

で、さらに細かく 修正する。

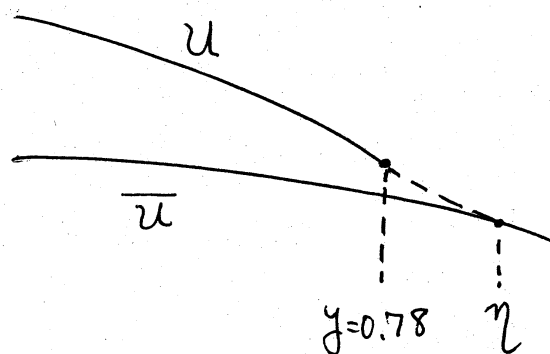
このようにして どんどん のびていけば  $y=0.78$   
あたりで  $\bar{u}$  にかなり近づくので、そこで  $C'$  を保つ  
ように接続する。これは  
2次式でよい。

$$\eta = 0.866 \dots < 1$$

このとき  $h$  の値は む  
しろよい方にくずれ

$$h \leq -0.19880$$

とすることができた。



$u(y)$  は、結局 次のような 関数である。

$$u = u_1 = 1.192803 - 0.043576y - 0.018938y^2 \\ - 0.010436y^3 - 0.011921y^4 \quad (0 \leq y \leq 0.2)$$

$$u = u_2 = u_1 + 0.000128(y-0.2)^3 - 0.012599(y-0.2)^4$$

$$u = u_3 = u_2 + 0.0010388(y-0.32)^3 - 0.0222789(y-0.32)^4$$

$$u = u_4 = u_3 - 0.0000747(y-0.44)^3 - 0.0409591(y-0.44)^4$$

$$u = u_5 = u_4 + 0.0019263(y-0.52)^3 - 0.080957(y-0.52)^4$$

$$u = u_6 = u_5 + 0.0064752(y-0.6)^3 - 0.193242(y-0.6)^4$$

$$u = u_7 = u_6 + 0.0054272(y-0.68)^3 - 0.431317(y-0.68)^4$$

$$u = u_8 = u_7 + 0.0015922(y-0.74)^3 - 0.825141(y-0.74)^4$$

$$u = u_9 = u_{10} + a(y-0.78)^2 + b(y-0.78) + c$$

$$u = u_{10} = 1 + 0.192(1 - y^{1.087})^{0.2535} - 0.008y$$

$$c = u_8(0.78) - u_{10}(0.78), \quad b = u'_8(0.78) - u'_{10}(0.78)$$

$$a = b^2 / 4c$$

$$\eta = -2c/b = 0.866 \dots$$

$$u = u_i \quad \text{for } y \in I_i \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$$

$$I_1 = [0, 0.2], \quad I_2 = [0.2, 0.32], \quad I_3 = [0.32, 0.44]$$

$$I_4 = [0.44, 0.52], \quad I_5 = [0.52, 0.6], \quad I_6 = [0.6, 0.68]$$

$$I_7 = [0.68, 0.74], \quad I_8 = [0.74, 0.78]$$

$$I_9 = [0.78, \eta], \quad I_{10} = [\eta, 1]$$

最終的な  $h(y)$  のグラフは、下図のようである。

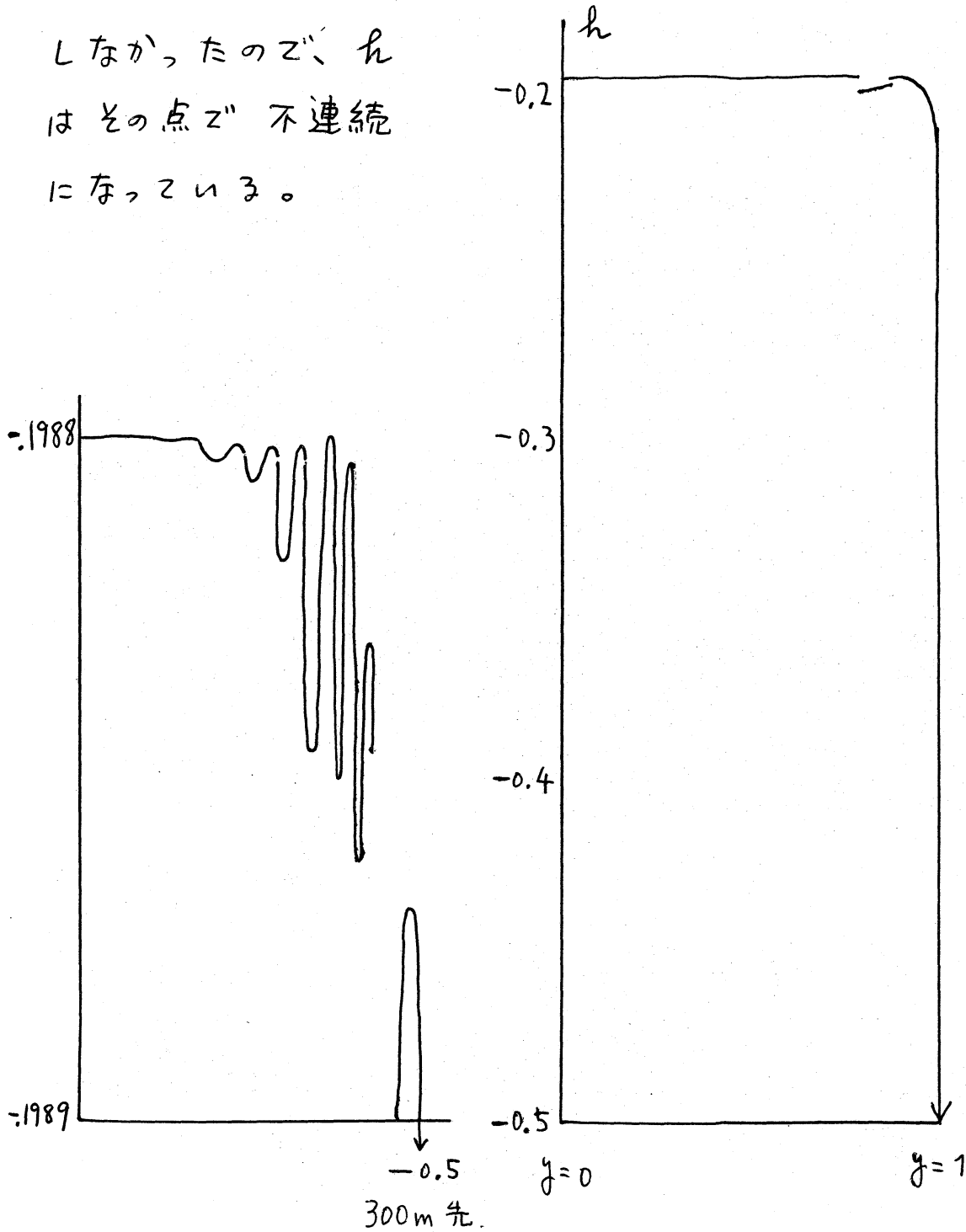
$\bar{u}$  と接続するとき、

$C'$  まではか 要請

しなかったのに、 $h$

はその点で 不連続

になっている。





$$h(y) \leq -0.19880 \quad 0 \leq y \leq 1$$

であるので

$$\lambda > -0.19880$$

に対し (1) の解の存在が言える。

この  $u(y)$  は、(8)  $u \geq 1$ ,  $u' \leq 0$  を満たしているもので (9)  $v \geq 1$  も成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{従って (10) } y = \omega(x) \\ \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{2\lambda}{u}\right)}{(1-y)v} \end{aligned}$$

から

$$0 < 1-y \leq x^{-2}$$

であるので、やはり algebraic type の解はつかまらずにない。

また、 $y \rightarrow 0$  のとき  $y \sim C_0 x^{\frac{4}{3}}$  であるが、 $\lambda_0 = -0.19880$  とするとき

$$C_0 = \left( \frac{u_0}{1 + \frac{2\lambda_0}{u_0}} \right)^{\frac{2}{3}} = (9 \times 0.19880025)^{\frac{2}{3}}$$

従って  $\lambda > \lambda_0$  に対し  $C_0 > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}$  となる。